11 класс

1. Имеет ли отрицательные корни уравнение $x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 3x + 9 = 0$?

Ответ: нет.

Решение. Преобразуем данное уравнение: $x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 3x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x^2-3)^2 - 4x^3 - 3x = 0$, $(x^2-3)^2 = 4x^3 + 3x \Leftrightarrow (x^2-3)^2 = x(4x^2+3)$. Если $x < 0$, то $(x^2-3)^2 \geq 0$, а $x(4x^2+3) < 0$, значит, полученное равенство при любом отрицательном значении *x* будет неверным. Следовательно, отрицательных корней нет.

<u>*Критерии проверки*</u>.

"+" – *приведено полное обоснованное решение*

"±" – *приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, утверждается, что $(x^2-3)^2 > 0$ при всех значениях x)*

"–" – *приведен только ответ*

"–" – *задача не решена или решена неверно*

2. Вася вписал в клетки таблицы 4×18 (4 строки, 18 столбцов) натуральные числа от 1 до 72 в некотором одному ему известном порядке. Сначала он нашел произведение чисел, стоящих в каждом столбце, а затем у каждого из восемнадцати полученных произведений вычислил сумму цифр. Могли ли все получившиеся суммы оказаться одинаковыми?

Ответ: нет.

Решение. Предположим, что каждая из указанных сумм цифр равна *S*. Так как некоторые из произведений содержат множители кратные девяти, то такие произведения делятся на 9, значит, их сумма цифр также делится на 9. Следовательно, число *S* должно быть кратно девяти.

Таким образом, произведение чисел в каждом столбце должно быть кратно девяти.
Оно может быть кратно девяти только в двух случаях:
1) если содержит хотя бы один множитель, кратный девяти;
2) если содержит не менее двух множителей, кратных трем, но не кратных девяти.

Среди чисел от 1 до 72 восемь чисел делятся на 9 и 16 чисел делятся на 3, но не делятся на 9. Следовательно, произведений, кратных девяти, может оказаться не больше, чем 8 + 8 = 16, то есть на 9 могут делится не больше, чем 16 сумм их цифр. Так как в таблице – 18 столбцов, то получено противоречие.

<u>*Критерии проверки*</u>.

"+" – *приведено полное обоснованное решение*

"±" – *приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*

"∓" – *присутствует идея делимости на 9, но решение не доведено до конца или содержит ошибки*

"–" – *рассмотрены только частные случаи или конкретные примеры*

"–" – *приведен только ответ*

"–" – *задача не решена или решена неверно*

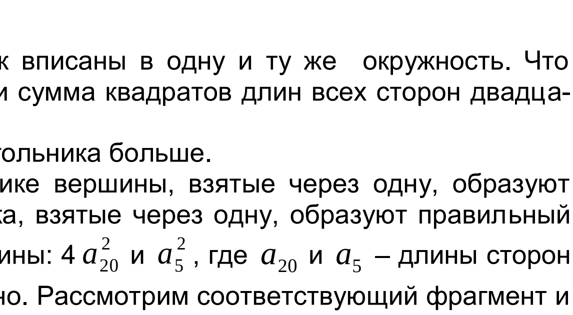
3. Правильный пятиугольник и правильный двадцатиугольник вписаны в одну и ту же окружность. Что больше: сумма квадратов длин всех сторон пятиугольника или сумма квадратов длин всех сторон двадцатиугольника?

Ответ: сумма квадратов длин сторон правильного пятиугольника больше.

Решение. Заметим, что в правильном двадцатиугольнике вершины, взятые через одну, образуют правильный десятиугольник, а вершины этого десятиугольника, взятые через одну, образуют правильный пятиугольник. Следовательно, достаточно сравнить две величины: $4a_{20}^2$ и a_5^2, где a_{20} и a_5 – длины сторон правильных двадцатиугольника и пятиугольника соответственно. Рассмотрим соответствующий фрагмент и введем обозначения вершин так, как показано на рис. 11.3 а, б. Далее можно рассуждать по-разному.

<u>Первый способ</u>. Воспользуемся тем, что при *n* > 4 угол любого правильного *n*-угольника – тупой. Рассмотрим треугольник $A_1A_2A_3$ с тупым углом A_2 (см. рис. 11.3а). По следствию из теоремы косинусов $2a_{20}^2 < a_{10}^2 \Leftrightarrow 4a_{20}^2 < 2a_{10}^2$. Аналогично, из треугольника $A_1A_3A_5$ получим, что $2a_{10}^2 < a_5^2$. Таким образом, $4a_{20}^2 < a_5^2$, откуда следует, что квадрат стороны пятиугольника больше.

Рис. 11.3а

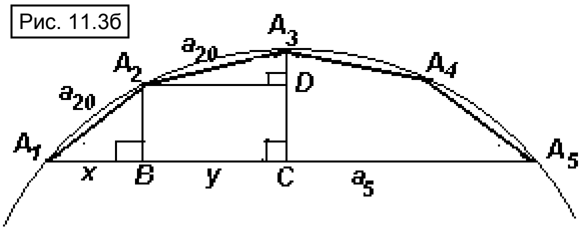


<u>Второй способ</u>. Опустим перпендикуляры A_2B и A_3C на A_1A_5, а также проведем перпендикуляр A_2D к A_3C (см. рис. 11.3б). Пусть $A_1B = x$, $A_2D = BC = y$. Используя, что угол правильного двадцатиугольника равен 144°, найдем углы A_2A_1B и A_3A_2D: $\angle A_2A_1B = 27°$; $\angle A_3A_2D = 9°$. Из прямоугольных треугольников A_2A_1B и A_3A_2D получим, что $4a_{20}^2 = 2(A_1A_2^2 + A_2A_3^2) = 2(\frac{x^2}{\cos^2 27^\circ} + \frac{y^2}{\cos^2 9^\circ}) < 2(\frac{x^2}{\cos^2 30^\circ} + \frac{y^2}{\cos^2 30^\circ}) = \frac{8}{3}(x^2 + y^2)$, так как косинус убывает на промежутке (0; 90°).

Тогда $a_5^2 = 4(x + y)^2 = 4(x^2 + 2xy + y^2) > \dfrac{8}{3}(x^2 + y^2) > 4a_{20}^2$, откуда и следует ответ.

Третий способ. Воспользуемся формулой для вычисления длин сторон правильных n-угольников, вписанных в окружность радиуса R: $a_n = 2R\sin\dfrac{180^\circ}{n}$. Тогда $\dfrac{a_5^2}{4a_{20}^2}$ = $\left(\dfrac{a_5}{2a_{20}}\right)^2$ = $\left(\dfrac{\sin 36^\circ}{2\sin 9^\circ}\right)^2$ = $\left(\dfrac{4\cos 18^\circ\cos 9^\circ\sin 9^\circ}{2\sin 9^\circ}\right)^2$ = $\left(2\cos 18^\circ\cos 9^\circ\right)^2 > 2{,}25 > 1$, так как $\cos 9^\circ > \cos 18^\circ > \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $a_5^2 > 4a_{20}^2$.

Рис. 11.3б

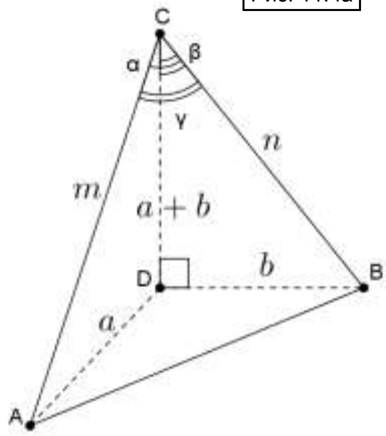


Критерии проверки.
"+" – *приведено полное обоснованное решение*
"±" – *приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*
"–" – *приведен только ответ*
"–" – *задача не решена или решена неверно*

4. Дана треугольная пирамида $ABCD$ с плоскими прямыми углами при вершине D, в которой $CD = AD + DB$. Докажите, что сумма плоских углов при вершине C равна 90°.

Решение. Введем обозначения: $\angle ACD = \alpha$, $\angle BCD = \beta$, $\angle BCA = \gamma$, $DA = a$, $DB = b$. По условию: $CD = a + b$, а доказать требуется, что $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.

Рис. 11.4а



Первый способ. Пусть $CA = m$, $CB = n$ (см. рис. 11.4а).

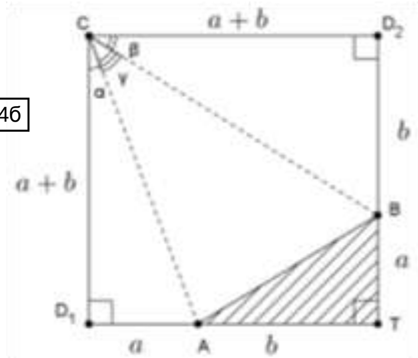
Сначала докажем, что углы $\alpha + \beta$ и γ – острые. Действительно, в прямоугольных треугольниках ACD и BCD стороны AD и BD – наименьшие, значит, $\alpha < 45^\circ$ и $\beta < 45^\circ$. Следовательно, $\alpha + \beta < 90^\circ$, тогда и $\gamma < \alpha + \beta < 90^\circ$. Теперь достаточно доказать, что $\sin(\alpha + \beta) = \cos\gamma$.

Заметим, что $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta =$
$\dfrac{a}{m}\cdot\dfrac{a+b}{n} + \dfrac{a+b}{m}\cdot\dfrac{b}{n} = \dfrac{(a+b)^2}{mn}$.

С другой стороны, из треугольника ABC по теореме косинусов:. $AB^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\gamma$ Учитывая, что $AB^2 = a^2 + b^2$, получим: $\cos\gamma = \dfrac{m^2 + n^2 - a^2 - b^2}{2mn}$ = $= \dfrac{(a+b)^2 + (a+b)^2}{2mn} = \dfrac{(a+b)^2}{mn}$. Таким образом, $\sin(\alpha + \beta) = \cos\gamma$, значит, $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.

Вычисление $\cos\gamma$ можно упростить, если воспользоваться формулой трех косинусов:
$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta = \dfrac{a+b}{m}\cdot\dfrac{a+b}{n} = \dfrac{(a+b)^2}{mn}$.

Рис. 11.4б



Второй способ. Заметим, что при фиксированных длинах ребер DA и DB существует единственная пирамида $ABCD$, удовлетворяющая условию задачи.

Рассмотрим квадрат CD_1TD_2 со стороной $a + b$ и отложим на его сторонах TD_1 и TD_2 отрезки $TA = b$ и $TB = a$ соответственно (см. рис. 11.4б). Тогда пятиугольник ABD_2CD_1 является разверткой боковой поверхности данной пирамиды, а треугольник ATB равен треугольнику ADB ее основания. Таким образом, выполняются все условия задачи, значит, $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$

Критерии проверки.
"+" – *приведено полное обоснованное решение*

“±” – *приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, при первом способе решения не обосновано, что углы $\alpha+\beta$ и γ – острые, или при втором способе решения не указано, что условие задачи однозначно задает пирамиду, и т. п.)*
“–” – *задача не решена или решена неверно*

Формулу трех косинусов школьники могут использовать без доказательства.

5. Функция $f(x)$ определена для всех действительных чисел, причем для любого x выполняются равенства: $f(x+2)=f(2-x)$ и $f(x+7)=f(7-x)$. Докажите, что $f(x)$ – периодическая функция.

Решение. Докажем, что данная функция имеет период 10. Можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Учитывая, что $f(x)$ определена везде, достаточно доказать, что, для любого действительного x выполняется равенство $f(x+10)=f(x)$.

Последовательно используя второе и первое равенство из условия, получим: $f(x+10)$ = $f((x+3)+7)$ = $f(7-(x+3))$ = $f(4-x)$ = $f(2+(2-x))$ = $f(2-(2-x))$ = $f(x)$.

Второй способ. Пусть $x_1 = x + 2$, $x_2 = 2 - x$. Тогда $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = 2$. Это означает, что точки графика $f(x)$ с координатами (x_1; $f(x_1)$) и (x_2; $f(x_2)$) симметричны относительно прямой $x = 2$, то есть такая прямая является осью симметрии этого графика. Аналогично, из второго равенства в условии следует, что прямая $x = 7$ также является осью симметрии графика данной функции.

Теперь воспользуемся теоремой: композиция двух симметрий с параллельными осями является параллельным переносом на вектор, перпендикулярный этим осям, модуль которого равен удвоенному расстоянию между осями. В нашем случае расстояние между осями равно 5, поэтому график $f(x)$ перейдет в себя при параллельном переносе на вектор $\overline{(10;0)}$. Следовательно, функция $f(x)$ – периодическая с периодом 10.

Отметим, что 10 может оказаться не наименьшим положительным периодом данной функции.

Критерии проверки.

“+” – *приведено полное обоснованное решение*
“±” – *приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности*
“∓” – *при первом способе решения проведены выкладки, использующие оба данных равенства, но из-за вычислительных ошибок получен период, не кратный десяти*
“–” – *задача не решена или решена неверно*

6. Каждое целое число на координатной прямой покрашено в один из двух цветов – белый или черный, причем числа 2016 и 2017 покрашены разными цветами. Обязательно ли можно найти три одинаково покрашенных целых числа, сумма которых равна нулю?

Ответ: обязательно.

Решение. Предположим таких целых чисел нет. Пусть, для определенности, число 2016 покрашено в черный цвет, а число 2017 – в белый. Рассмотрим два случая:

1) Число 0 покрашено в белый цвет. Так как числа 0 и 2017 – белые, то число –2017 покрашено в черный цвет. Из того, что числа –2017 и 2016 – черные и –2017 + 2016 + 1 = 0 следует, что число 1 – белое. Аналогично, так как числа 0 и 1 – белые, то число –1 должно быть черным. Далее, числа –1 и 2016 – черные, значит, число –2015 – белое, тогда число 2015 – черное. Числа –2015 и 2017 – белые, 2017 + (–2015) + (–2) = 0, поэтому число –2 – черное, тогда число 2 – белое.

Таким образом, числа 1 и 2 покрашены в белый цвет. Пусть число n – наименьшее натуральное число, покрашенное в черный цвет, тогда число $-n$ покрашено в белый цвет. Так как 1 + (n – 1) + ($-n$) = 0, n > 2 и эти три числа – белые, то получено противоречие.

2) Число 0 покрашено в черный цвет. Так как числа 0 и 2016 – черные, то число –2016 покрашено в белый цвет. Из того, что числа –2016 и 2017 – белые и –2016 + 2017 + (–1) = 0 следует, что число –1 – черное. Аналогично, так как числа 0 и –1 – черные, то число 1 должно быть белым. Далее, числа 1 и –2016 – белые, значит, число 2015 – черное, тогда число –2015 – белое. Числа –2015 и 2017 – белые, (–2015) + 2017 + (–2) = 0, поэтому число –2 – черное.

Таким образом, числа –1 и –2 покрашены в черный цвет. Пусть число $-m$ – наибольшее целое отрицательное число, покрашенное в белый цвет, тогда число m покрашено в черный цвет. Так как –1 + ($-m$ + 1) + m = 0, $-m$ < –2 и эти три числа – черные, то получено противоречие.

Допустимо не разбирать второй случай подробно, указав, что он аналогичен первому, но указав при этом, в чем конкретно он будет отличаться

Критерии проверки.

“+” – *приведено полное обоснованное решение*
“±” – *верно и полностью разобран только один из возможных случаев*

“∓” – *присутствует верная идея получения противоречия, но допущены ошибки или решение не доведено до конца*
“–” – *приведен только ответ*
“–” – *задача не решена или решена неверно*